Verwendung einer klassischen Konfiguration Johann Bolyai's bei der Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene.

Von PAUL SZÁSZ in Budapest.

Nachdem L. GÉRARD[1]) die hyperbolische Trigonometrie in der Ebene mit Vermeidung der *hyperbolischen Parallelen* und des *Grenzkreises* unmittelbar hergeleitet hat, ist H. LIEBMANN[2]) eine Herleitung ohne Zuhilfenahme des Raumes, gerade mit den genannten klassischen Hilfsmitteln geglückt. Seitdem sind mehrere unmittelbare Herleitungen enstanden.[3]) Eine Darstellungsweise wie die von H. LIEBMANN, hat aber aus historischen und methodischen Gründen — wir glauben es — immer noch sein Interesse.

In vorliegender Note wird die LIEBMANNsche Herleitung vereinfacht, indem wir statt der übrigen Formeln der *Streckentrigonometrie* ausser der unten angeführten Formel (4), die klassische Konfiguration von J. BOLYAI[4]) zur Bestimmung des Parallelwinkels als Funktion des Lotes einerseits, und einen Kunstgriff von M. RÉTHY[5]) andererseits verwenden. Anstatt der Rektifikation des Kreisbogens wird der Satz[6]) benützt, laut welchem der Grenzwert

(1) $$K(r) = \lim \frac{s}{\sigma} \qquad (\sigma \to 0)$$

---

[1]) L. GÉRARD, Sur la géométrie non euclidienne, *Thèse* (Paris, 1892), Chapitre I, ferner mit demselben Titel, *Nouvelles Annales de Mathématique,* (3) **12** (1893), S. 74—84.

[2]) H. LIEBMANN, Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Klasse,* **59** (1907), S. 187—210.

[3]) Siehe z. B. PAUL SZÁSZ, Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene, diese *Acta,* **12 A** (1950), S. 44—52.

[4]) J. BOLYAI, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, etc.,* (Marosvásárhely, 1832), besonders § 29; siehe P. STÄCKEL, *Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen,* II (Leipzig und Berlin, 1913), S. 197.

[5]) M. RÉTHY, Bolyai János „ujj más világának" ismertetése, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **12** (1903), S. 1—29, 303—320, insbesondere S. 15—16. Ich möchte an dieser Stelle ein Zitat in meiner Arbeit[3]) richtigzustellen. Der im § 5 meiner Arbeit zitierte Kunstgriff ist erst in dieser Arbeit von RÉTHY zu finden.

[6]) PAUL SZÁSZ, a. a. O. § 1, Satz II.

existiert, wobei σ die Maßzahl eines Zentriwinkels im Kreise mit dem Radius r und s die entsprechende Sehne bedeutet.

Aus der zitierten Arbeit von H. LIEBMANN entnehmen wir die Gleichung des Grenzkreises in rechtwinklingen Koordinaten, wenn ein Punkt auf ihm als Koordinatenanfang und die zugehörige Grenzkreisachse als Abszisse gewählt wird. Diese Gleichung lautet

$$e^x = \operatorname{ch} y. \tag{2}$$ [7])

Hierbei sind x und y *natürliche Maßzahlen*, d. h. *die Längeneinheit ist so gewählt, daß für zwei konzentrische Grenzkreisbogen* $\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$ *zwischen denselben Achsen* AA' *und* BB' *im Falle* $\overline{AA'} = \overline{BB'} = 1$ *das Verhältnis* $\widehat{AB} : \widehat{A'B'} = e$ *ausfällt.* Diese Wahl der Längeneinheit wird im folgenden beibehalten.

Zwei Strecken heißen *komplementär*, wenn die Summe der entsprechenden Parallelwinkel ein Rechter ist. Für Komplementärstrecken l, m ergibt sich mit Hilfe von (2)

$$\operatorname{cth} l = \operatorname{ch} m. \tag{3}$$ [8])

H. LIEBMANN[9]) hat noch auf Grund von (2) gezeigt, daß im rechtwinkligen Dreieck zwischen der Hypotenuse c, einer Kathete a und dem gegenüberliegenden Winkel $\lambda = \Pi(l)$ (der zum Lote l als Parallelwinkel angehört) die Beziehung

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c} = \frac{1}{\operatorname{ch} l} \tag{4}$$

besteht. Von diesen Formeln (3) und (4) wird im folgenden auch Gebrauch gemacht.

Die vorkommenden Winkel werden in *analytischen Maßzahlen* angegeben, d. h. *die Einheit für die Winkelmessung wird so gewählt, daß sich für den rechten Winkel die Maßzahl* $\frac{\pi}{2}$ *ergibt.*

§ 1. Bestimmung des Parallelwinkels als Funktion des Lotes.

Satz. *Gehören die Spitzwinkel* λ *und* $\frac{\lambda}{2}$ *den Loten* l *bzw.* l_1 *als Parallelwinkel an, so ist*

$$\operatorname{sh} l_1 = e^l. \tag{5}$$

Beweis. Wir stellen die oben zitierte Konfiguration von J. BOLYAI unwesentlich modifiziert her. Der Scheitel des Winkels λ sei mit P, die un-

---

7) H. LIEBMANN, a. a. O. S. 191, Formel (4).
8) H. LIEBMANN, a. a. O. S. 192, Formel (6).
9) H. LIEBMANN, a. a. O. S. 194, Formel (1).

endlich fernen Punkte seiner Schenkel mit Ω_1 bzw. Ω_2 bezeichnet. Auf der Halbgerade $P\Omega_1$ sei die Strecke $\overline{PQ}=2l$ abgetragen und bezeichne M ihren Mittelpunkt. Nach der Bedeutung von l ist $M\Omega_2 \perp P\Omega_1$ und $\sphericalangle PQ\Omega_2 = \sphericalangle QP\Omega_2 = \lambda$. Von P bzw. Q aus seien auf die Gerade $\Omega_1\Omega_2$ die Lote $\overline{PT}$, resp. $\overline{QT'}$ gefällt. Dann wird $\sphericalangle TP\Omega_1 = \sphericalangle TP\Omega_2 = \frac{\lambda}{2}$, weil beide Winkel dem Lote $\overline{PT}$ als Parallelwinkel angehören und die Summe $\sphericalangle \Omega_1 P \Omega_2 = \lambda$ haben. Weiter wird $\sphericalangle T'Q\Omega_1 = \sphericalangle T'Q\Omega_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}$, da die beiden Winkel dem Lote $\overline{QT'}$ als Parallelwinkel entsprechen mit der Summe $\sphericalangle \Omega_1 Q \Omega_2 = \pi - \lambda$. Also ist $\overline{PT} = l_1$ und $\overline{QT'} = \bar{l}_1$ das Komplement von l_1. Die Gerade $\Omega_1\Omega_2$ sei von dem Grenzkreise durch P mit dem Mittelpunkt Ω_1 in R, von dem durch P und Q mit dem Mittelpunkt Ω_2 in S, endlich von dem Grenzkreise durch Q mit dem Mittelpunkt Ω_1 in U geschnitten, und man setze

$$\overline{TR} = \overline{TS} = t, \quad \overline{T'S} = \overline{T'U} = u.$$

Aus der Konstruktion folgt dann

$$\overline{RU} = \overline{PQ} = 2l, \quad \overline{RS} = 2t, \quad \overline{US} = 2u$$

und $\overline{RS} = \overline{RU} + \overline{US}$, also ist

$$t = l + u.$$

Daraus ergibt sich auf Grund von (2)

$$\operatorname{ch} l_1 = e^l \operatorname{ch} \bar{l}_1.$$

Nach (3) ist aber

$$\operatorname{ch} \bar{l}_1 = \operatorname{cth} l_1$$

da doch $\bar{l}_1$ und l_1 Komplementärstrecken sind, und aus diesen beiden Gleichungen folgt die Behauptung unter (5). W. z. b. w.

Im Besitze dieses Satzes, können wir den Parallelwinkel λ als Funktion des Lotes l, wie folgt, bestimmen.

Die Winkel

$$\lambda, \frac{\lambda}{2}, \ldots, \frac{\lambda}{2^n}, \ldots$$

sollen als Parallelwinkel den Loten

$$l, l_1, \ldots, l_n, \ldots$$

entsprechen.[10]) Wegen $\operatorname{ch} l > 1$ kann ein Spitzwinkel φ durch die Gleichung

$$\frac{1}{\operatorname{ch} l} = \sin\varphi \tag{6}$$

definiert werden. Dann ist

$$\operatorname{sh}^2 l = \frac{1}{\sin^2\varphi} - 1 = \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi},$$

[10]) Vgl. H. Liebmann, a. a. O. S. 206.

d. h.

$$\operatorname{sh} l = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) ergibt sich nun auf Grund von (5)

$$\operatorname{sh} l_1 = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

woraus folgt

$$\operatorname{ch}^2 l_1 = 1 + \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

also

$$\frac{1}{\operatorname{ch} l_1} = \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich jetzt in ähnlicher Weise

$$\frac{1}{\operatorname{ch} l_2} = \sin\frac{\varphi}{4},$$

u. s. w. Es gilt also allgemein

$$\frac{1}{\operatorname{ch} l_n} = \sin\frac{\varphi}{2^n}. \tag{8}$$

Wir nehmen nun ein gleichschenkliges Dreieck ABB' mit $\sphericalangle BAB' = \frac{\lambda}{2^n}$, $\overline{AB} = \overline{AB'} = r$, $\overline{BB'} = s_n$. Bezeichnet C den Mittelpunkt von $\overline{BB'}$ so ist $\sphericalangle BAC = \frac{\lambda}{2^{n+1}}$, $\overline{BC} = \frac{s_n}{2}$. Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist laut (4)

$$\operatorname{sh}\frac{s_n}{2} = \frac{\operatorname{sh} r}{\operatorname{ch} l_{n+1}},$$

also besteht mit Rücksicht auf (8)

$$\operatorname{sh}\frac{s_n}{2} = \operatorname{sh} r \sin\frac{\varphi}{2^{n+1}}.$$

Hieraus folgt für $n \to +\infty$

$$2^n s_n \to \varphi \operatorname{sh} r.$$

Andererseits gilt auf Grund von (1) für $n \to +\infty$ die Limesbeziehung

$$2^n s_n \to \lambda K(r),$$

und es entsteht somit

$$\varphi = \frac{K(r)}{\operatorname{sh} r}\lambda. \tag{9}$$

Für $\lambda \to \frac{\pi}{2}$ strebt aber $l \to 0$, also nach (6) gleichzeitig $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, aus (9) folgt deshalb

$$\frac{K(r)}{\operatorname{sh} r} = 1$$

d. h. $\varphi = \lambda$. Demnach geht (6) in die Formel

$$\frac{1}{\operatorname{ch} l} = \sin \lambda \tag{10}$$

über.

Damit ist λ als Funktion von l bestimmt.

§ 2. Die Grundformeln der hyperbolischen Trigonometrie.

Für ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c, einer Kathete a und dem gegenüberliegenden Winkel λ gilt nach (4) und (10) die Formel

$$\sin \lambda = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}. \tag{I}$$

Daraus folgt für das allgemeine Dreieck mit den Seiten a, b, c und gegenüberliegenden Winkel λ, μ, ν offenbar

$$\sin \lambda : \sin \mu : \sin \nu = \operatorname{sh} a : \operatorname{sh} b : \operatorname{sh} c. \tag{I*}$$

Die Beziehung zwischen einer Kathete a, dem gegenüberliegenden Winkel λ, und dem anderen Spitzwinkel μ eines rechtwinkligen Dreiecks, können wir nun mit Hilfe des zitierten Kunstgriffes von M. RÉTHY bekommen. Wird nämlich das rechtwinklige Dreieck mit seinem Spiegelbild in Bezug auf die andere Kathete ergänzt, so gilt in dem so erhaltenen allgemeinen Dreieck laut (I*)

$$\frac{\sin 2\lambda}{\sin \mu} = \frac{\operatorname{sh} 2a}{\operatorname{sh} c},$$

und daraus ergibt sich mit Rücksicht auf (I)

$$\frac{\cos \lambda}{\sin \mu} = \operatorname{ch} a. \tag{II}$$

Die Formeln (I) und (II) haben schon die ganze hyperbolische Trigonometrie zur Folge.

(Eingegangen am 27. Februar 1952.)